数理解析研究所講究録
第 752 巻 1991 年 173-177

A note on Klingen's Eisensteinseries

名大理　　北岡良之 (YOSHIYUKI KITAOKA)

S, T を各々次数 n, m の整数係数正値対称行列とする。この時不定方程式

$$\text{(D)} \qquad S[X] := {}^tXSX = T$$

に関し,(D) が全ての素数 p に対し解 $X_p \in M_{n,m}(\mathbf{Z}_p)$ を持つとき (D) が $\mathbf{Z}$ 上解けるかという問題を考える。もし $n \geq 2m+3$ かつ $\min_{0\neq x\in \mathbf{Z}^m} T[x]$ が充分大であるなら (D) は $\mathbf{Z}$ 解を持つことは知られている。そこで当然条件 $n \geq 2m+3$ は最良かどうかが問題となる。$m=1$ にたいしては最良であるが、どうも $m \geq 2$ の時は最良ではないらしいように思える。そこで $n = 2m+2 \geq 6$ のときに取り組もうという訳であるが代数的には見通しがたちにくいので見通しの立てやすい解析的方法をとってみたい。それは (D) の解の個数 $r(S,T)$ の生成関数であるテータ級数を Eisentein 級数と残りの部分に分け各々の Fourier 係数 $a(T)$, $b(T)$ の間に $b(T) = o(a(T))$ という関係が成り立つことをみてやれば $r(S,T) = a(T) + b(T)$ は漸近式を与え、特に $r(S,T) \neq 0$ が得られる訳である。それには保型形式の Fourier 係数の大きさの評価が必要であるが Eisenstein 級数と cusp forms については (今の場合) 判っているとする。従ってそれ以外の modular forms の Fourier 係数の大きさの評価が必要となってくるがそのような modular forms は重さが充分大きければ Klingen によって定義された Eisenstein series で表され、その Fourier 係数については判っている。しかし重さが小さいとき (今の場合 $n/2 = m+1$) Klingen の Eisenstein 級数はそのままでは絶対収束せず Hecke の trick を使うわねばならない。しかし level$\neq 1$ のとき Klingen の Eisenstein 級数は Hecke の trick でうまく定義できるかどうかも判っていないようである。ここではまず第一歩として level $= 1$ のときを扱う。この時すらまだ満足すべき状態ではない。さて $1 \leq r < n$ とし

$$f(z) = \sum b(t)e(\operatorname{tr} tz) \quad (e(x) := exp(2\pi ix))$$

を次数 r, 重さ k: $(\equiv 0 \bmod 2)$ の cusp form とし $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_n := Sp(n, \mathbf{Z})$ に対し

$$\tau(z, M, f, s) = j(M,z)^{-k} f(M<z>_1) \left(\frac{|\Im M<z>|}{|\Im M<z>_1|} \right)^s$$

とおく。但 $z \in H_n := \{z = {}^tz \in M_n(\mathbf{C}) \mid \Im z > 0\}$, $j(M,z) := \det(cz+d)$ 。また一般に $A = \begin{pmatrix} A_1^{(r)} & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$ によって A_i を定める。この時

$$E(z,f,s) := \sum_{M\in \Delta_{n,r}\backslash \Gamma_n} \tau(z,M,f,s)$$

とおく。ここで $\Delta_{n,r}$ は $n-r\times n+r$ 次左下小行列が零行列となる元の全体のなす群をあらわす。このとき $E(z,f,s)$ は

$$\Re(s) > (n+r+1-k)/2$$

ならば絶対かつ一様収束する。さて結果を述べるための準備をする。
$M\in\Gamma_r(\mathbf{Q}) := Sp(r,\mathbf{Q})$ に対し

$$(f|M)(z) := j(M,z)^{-k}f(M<z>),\quad f|\Gamma_r M\Gamma_r := \sum_i f|M_i$$

但 $\Gamma_r M\Gamma_r = \sqcup_i \Gamma_r M_i$ とする。また、環 R に対して $\Lambda_r(R) := \{\lambda = {}^t\lambda \in M_r(R)\}$ とおく。さらに $R=\mathbf{Z}$ または $R=\mathbf{Z}_p$ のとき $2\lambda\in\Lambda_r(R)$ かつ λ の対角成分が全て R にぞくする λ 全体を $\Lambda'_r(R)$ とあらわしその元を half-integral と呼ぶ。$t\in\Lambda'_r(\mathbf{Z}_p)$ に対し

$$\beta_p(s,t) := \sum_{\lambda\in\Lambda_r(\mathbf{Q}_p)/\Lambda_r(\mathbf{Z}_p)} \nu(\lambda)^{-s} e(\operatorname{tr} t\lambda)$$

とおく。$\nu(\lambda)$ は λ の単因子の分母（を p のべきにとっての）積とおく。t が half-integral でなければ $\beta_p(s,t)=0$ とおく。t が half-integral であれば $\prod_p \beta_p(s,t)$ は $\Re s > r+1$ で絶対収束する。

結果は次の通りである。

定理。$\Re s > (n+r+1-k)/2$ かつ $\Re s \geq 0$ とする。この時正定値で half-integral な $T\in\Lambda_n(\mathbf{Q})$ に対して

$$\int E(x+iT^{-1}, \sum_D |D|^{-k-2s} f|\Gamma_r \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^{-1}\end{pmatrix}\Gamma_r, s) e(-\operatorname{tr} Tx)dx$$
$$= H(1_n,1_n;s)\sum_x \{|T[x_d^{-1}]|^{k-(n+1)/2+2s}\prod_p \beta_p(T[x_d^{-1}],k+2s)\}|T[x]|^{(r+1)/2-ks} b(T[x]),$$

ここで 積分域の x は $x\in\Lambda_n(\mathbf{R})/\Lambda_n(\mathbf{Z})$ を動き D は r 次の単因子行列, 即ち $\operatorname{diag}(d_1,\cdots,d_r)$ ($d_1|\cdots|d_r, d_i>0$)) を動き等式の下の x は $x\in M_{n,r}(\mathbf{Q})/GL_r(\mathbf{Z})$ で $\operatorname{rank} x = r$ となるものを動き $x = x_d^{-1}x_n$, $x_d\in M_n(\mathbf{Z})$, $x_n\in M_{n,r}(\mathbf{Z})$ 更に (x_d, x_n) が primitive となるように分解する。
又関数 H は $y, S\in\Lambda_n(\mathbf{R})$, $y>0$, $S_1>0$ に対し

$$\begin{aligned} &H(S,y;s)\\ =&e(i\operatorname{tr} S_1 y_1)\int_{\begin{pmatrix} 0^{(r)} & \sigma_2 \\ {}^t\sigma_2 & \sigma_4\end{pmatrix}\in\Lambda_n(\mathbf{R})} |\sigma_4 + iy_4|^{-k}|y^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_2\\ \sigma_4\end{bmatrix} + y_4|^{-s}\\ &\times e(-\operatorname{tr} S_1\cdot z_4^{-1}[{}^t z_2] - \operatorname{tr}\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ {}^t\sigma_2 & \sigma_4\end{pmatrix} S)\, d\sigma_2 d\sigma_4\end{aligned}$$

と定義する。ここで $z_j := \sigma_j + y_j$ $(j=1,2)$ とした。

証明は次の通り.

補題1。

$$\{M \in \Gamma_n \mid M \text{ の左下 } n-r \times n \text{ 小行列の } rank = n-r\}$$
$$= \sqcup\ \Delta_{n,r} M(\sigma, u) \begin{pmatrix} w^{-1} & 0 \\ 0 & {}^t w \end{pmatrix},$$

ここで

$$\Gamma'_{n-r} := \{M \in \Gamma_{n-r} \mid M \text{ の左下 } n-r \text{ 次正方行列は正則}\}$$
$$\Gamma_{n-r}(\infty) := \{M \in \Gamma_{n-r} \mid M \text{ の左下 } n-r \text{ 次正方行列は零行列 }\}$$
$$U'_n := \{u \in SL_n(\mathbf{Z}) \mid u \text{ の右下 } n-r \text{ 次正方行列は正則 }\}$$
$$P_{n-r} := \{u \in SL_n(\mathbf{Z}) \mid u \text{ の左下 } n-r \times r \text{ 次正方行列は零行列 }\}$$

と置くとき

$$M(\sigma, u) := \begin{pmatrix} 0 & & -1_r & \\ & -1_{n-r} & & -1_{n-r} \\ 1_r & & 1_r & \\ & 0 & & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^t u^{-1} & \\ & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & & 0 & \\ & a & & b \\ 0 & & 1_r & \\ & c & & d \end{pmatrix}$$

であり

$$\sigma \in \Gamma_{n-r}(\infty)\backslash\Gamma'_{n-r}, u \in P_{n,r}\backslash U'_n, w \in SL_n(\mathbf{Z})/P_{n,r}$$

を動く．更に

(i) $$\tau\left(z, M \begin{pmatrix} 1_n & \lambda \\ 0 & 1_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w^{-1} & \\ & {}^t w \end{pmatrix}, f, s\right) = \tau(z[{}^t w^{-1}] + S, M, f, s),$$

(ii) $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ で $a_1 = 0, c_3 = 0, |c_1||c_4| \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} &\tau(z, M, f, s) \\ =&|c_1|^k |c_4|^{-k} (|c_4|^2)^{-s} |z_4 + c_4^{-1} d_4|^{-k} \left| y^{-1} \begin{bmatrix} x_2 + {}^t(c_4^{-1} d_3) \\ x_4 + c_4^{-1} d_4 \end{bmatrix} + y_4 \right|^{-s} \\ &\times f(z_1[{}^t c_1] - (z_4 + c_4^{-1} d_4)^{-1} [({}^t z_2 + c_4^{-1} d_3) {}^t c_1] + d_1 {}^t c_1 - c_2 c_4^{-1} d_3 {}^t c_1) \end{aligned}$$

となり

(iii) half-integral な $T \in \Lambda_n(\mathbf{Q})$ と (ii) の M に対し

$$\begin{aligned} &\int_{x \in \Lambda_n(\mathbf{R})/\Lambda_n(\mathbf{Z})} \sum_{S = \begin{pmatrix} 0^{(r)} & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{pmatrix} \in \Lambda_n(\mathbf{Z})} \tau(z + S, M, f, s) e(-\operatorname{tr} Tx) dx \\ =&H(T, y; s) |c_1|^k |c_4|^{-k} (|c_4|^2)^{-s} e(\operatorname{tr} c^{-1} dT) b(T_1[c_1^{-1}]) \end{aligned}$$

となる。ここで $\Re s > (n+r+1-k)/2, \Re s \geq 0$ の仮定は全ての積分、和等の可換性及び絶対収束のために使っている。ここでここで $\lambda = \begin{pmatrix} 0^{(r)} & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \in \Lambda_n(\mathbf{Z})$ に対して

$$\Delta_{n,r} M(\sigma, u) \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \Delta_{n,r} M(\sigma \begin{pmatrix} 1 & \lambda_4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, u \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c\lambda_3 & 1 \end{pmatrix})$$

但 $\sigma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-r}$, に注意して

$$\begin{aligned} &\int_{x \in \Lambda_n(\mathbf{R})/\Lambda_n(\mathbf{Z})} \sum_{\sigma, u} \tau(z, M(\sigma, u), f, s) e(-\operatorname{tr} Tx)\, dx \\ =&H(T, y; s) \sum_{c,d,v_1,v_2} (|v_1|^{-2})^s |c|^{-k} (|c|^{-2})^s b(T_1[v_1^{-1}]) \\ &\times e(\operatorname{tr} \begin{pmatrix} ac^{-1}[{}^t v_2 {}^t v_1^{-1}] & -v_1^{-1} v_2 {}^t c^{-1} \\ -c^{-1\,t} v_2 {}^t v_1^{-1} & c^{-1} d \end{pmatrix} T) \end{aligned}$$

となる。但 σ, u は補題１のものであり等式の下の和は

$$\begin{cases} c \in GL_{n-r}(\mathbf{Z}) \backslash M_{n-r}(\mathbf{Z}) \quad |c| \neq 0 \\ d \in \{d \in M_{n-r}(\mathbf{Z}) \mid (c, d) = 1\} / c\Lambda_{n-r}(\mathbf{Z}) \\ v_1 \in GL_r(\mathbf{Z}) \backslash M_r(\mathbf{Z}) \quad |v_1| \neq 0 \\ v_2 \in M_{r,n-r}(\mathbf{Z}) \bmod v_1 M_{r,n-r}(\mathbf{Z})^t c, \quad (v_1, v_2) : primitive \end{cases}$$

を動く。$(c, d) = 1$ は $\begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-r}$ を意味する。

ここで $(v_1, v_2) = 1$ の条件が取れれば v_2 に関する三角和を計算できる。従って、そのためには Möbius 変換 $b(t) = \sum_{g \in GL_r(\mathbf{Z}) \backslash GL_r(\mathbf{Q})} c(t[g^{-1}])$ を用いればよいがこのままでは c は modular form の Fourier 係数とはならないから両側剰余類を用いてならしてやる。即ち f の代わりに $\sum_D |D|^{-k-2s} f | \Gamma_r \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_r$ を使うことによって $(v_1, v_2) = 1$ の条件を外し、 多少の計算を続行することにより定理の s と $T \in \Lambda', |T| \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned} &\int_{x \in \Lambda_n(\mathbf{R})/\Lambda_n(\mathbf{Z})} E(z, \sum |D|^{-k-2s} f | \Gamma_r \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \Gamma_r, s) e(-\operatorname{tr} Tx)\, dx \\ =& \sum_{w \in GL_n(\mathbf{Z})/P_{n,r}} H(T[w], y[{}^t w^{-1}]; s) \sum ||u||^{n-r-2s} ||v||^{r+1-2k-2s} b(T[w]_1[u^{-1}v]) \\ \times& \prod_p \beta_p(T[w] \left[\begin{pmatrix} u & \\ & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right], k+2s) \end{aligned}$$

となる。ここで u, v は $u, {}^t v \in GL_r(\mathbf{Z})\backslash M_r(\mathbf{Z})$, $|uv| \neq 0$, (u, v) : primitive を動き、$T > 0$ なら

$$
\begin{aligned}
&H(T[w], y[{}^t w^{-1}]; s) \\
=&|T|^{(r-n)/2}|T^{-1}[{}^t w^{-1}]_4|^{(r+1)/2-(k+s)}H(1_n, 1_n; s) \\
=&|T|^{(r-n)/2}(|T|^{-1}|T[w]_1|)^{(r+1)/2-(k+s)}H(1_n, 1_n; s)
\end{aligned}
$$

となり定理を得る。まだ level 1 のときでも不満足な結果なので詳細は省いたが次のような基本的な事柄が(私には) 判っていない。level ≥ 1 とし重さの低いとき Klingen の Eisenstein 級数が定義できるか、そしてそれらは通常の Eisenstein 級数や cusp forms とともに （全ての modular forms とまで欲張らずとも ） テータ級数を書き表せるか? 又 Fourier 係数を求め評価出来るか? level > 1 のときも Fourier 係数を求めることは出来るが定理のようにはまだまとまっていない。注意として定理から判るように重さの低いとき Fourier 係数は Dirichlet 級数を解析接続したときの値である。また形式的 Fourier 展開自体は難しくないが $\Re s$ が小さいときそれらが絶対収束することを期待するのは無理がありそうに思える。しかし所詮 Eisenstein 級数であるからにはそんなに難しくはなるはずがなく案外簡単なのかも知れないという気がする。